

ANALISIS DEL PROCESO DE FISURACION EN ESTRUCTURAS DE HORMIGON
POR EL M.E.F. MEDIANTE UN MODELO PLASTICO.

MOLINA RUIZ, J.; ALARCON ALVAREZ, E.

Dep. Mecánica Estructural y Construcciones Industriales

E.T.S.I. Industriales

C/ José Gutiérrez Abascal, 2

Universidad Politécnica de Madrid

28006 MADRID (España).

CERROLAZA RIVAS, M.

Inst. de Materiales y Modelos Estructurales

P.O. 50361

Universidad Central de Venezuela

CARACAS (Venezuela).

RESUMEN

El Método de los Elementos Finitos ha demostrado ser una -
poderosa herramienta para el análisis de problemas complejos en
Ingeniería Estructural, tales como la resolución de estructuras
cuyos materiales son susceptibles de plastificación, por ejem-
plo. En cualquier caso, tal éxito sólo es posible cuando el mo-
delo elegido de comportamiento corresponde a la realidad experi-
mental; siendo éste uno de los problemas aún no resueltos para
el hormigón por no existir modelos suficientemente generales -
que predigan su comportamiento dentro de las teorías de la Mecá-
nica del Continuo.

En este trabajo, se presenta un modelo para el estudio de
la fisuración en el hormigón dentro de un contexto matemático
análogo al utilizado en la Teoría de la Plasticidad; de manera
que los esquemas utilizados en el M.E.F. para la implementación
de ésta siguen siendo válidos. El resultado es un método para -
el análisis de estructuras de hormigón que recoge el complejo -
fenómeno de la fisuración con relativa sencillez.

También son presentados algunos ejemplos resueltos con un programa de ordenador que implementa dicho modelo dentro de las técnicas del M.E.F.

1. IMPLEMENTACION DEL MODELO ELASTO-PLASTICO EN EL M.E.F.

En este apartado se pretende hacer una revisión de los conceptos básicos del modelo plástico y su implementación a modo de introducción.

Las tres ecuaciones que definen el comportamiento plástico son:

- La superficie de plastificación.
- La regla de plastificación.
- La ley de endurecimiento por plastificación.

Además de la descomposición de la deformación total en sus componentes elástica y plástica

$$d\varepsilon_{\sim} = d\varepsilon_{\sim}^e + d\varepsilon_{\sim}^p \quad (1)$$

donde la deformación elástica es definida a través de la tensión y la matriz elástica como

$$d\varepsilon_{\sim}^e = D_{\sim}^{-1} \cdot \sigma_{\sim} \quad (2)$$

La superficie de plastificación se puede escribir como:

$$F(\sigma_{\sim}, \bar{\varepsilon}^p) = f(\sigma_{\sim}) - \sigma^p(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (3)$$

donde:

$f(\sigma_{\sim})$ = función de plastificación.

σ^p = tensión límite de plastificación.

$\bar{\varepsilon}^p$ = deformación plástica equivalente.

y definiéndose

$$d\bar{\epsilon}^P = \frac{\sigma_{\sim}^T d\epsilon_{\sim}^P}{\sigma^P} \quad (4)$$

La suposición de que la tensión límite de plastificación es una función de la deformación plástica equivalente equivale a la hipótesis de endurecimiento por trabajo plástico. Es decir, el trabajo plástico definido por

$$dw^P = \sigma_{\sim}^T d\epsilon_{\sim}^P \quad (5)$$

puede ser utilizado como parámetro de endurecimiento en

$$\sigma^P = \sigma^P(w^P) \quad (6)$$

en lugar de la deformación plástica equivalente, puesto que, introduciendo (5) y (6) en (4)

$$d\bar{\epsilon}^P = \frac{dw^P}{\sigma^P(w^P)} \quad (7)$$

y existe una relación biunívoca entre ambos parámetros.

En la Teoría de la Plasticidad Asociada la regla de plastificación se escribe como

$$d\epsilon_{\sim}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\sim}} d\lambda \quad (8)$$

donde λ , el multiplicador plástico, se iguala salvo una constante a la deformación plástica equivalente cuando $f(\sigma_{\sim})$ es una función homogénea de grado 1, es decir, introduciendo (8) en (4) y recordando (3):

$$d\bar{\epsilon}^P = \frac{\sigma_{\sim}^T \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\sim}} d\lambda}{\sigma^P} = d\lambda \quad (9)$$

Por último, la ley de endurecimiento por plastificación se ha de obtener experimentalmente como

$$H' = \frac{d\sigma^P}{d\bar{\epsilon}^P} \quad (10)$$

siendo H' el módulo plástico (ver figura 1).

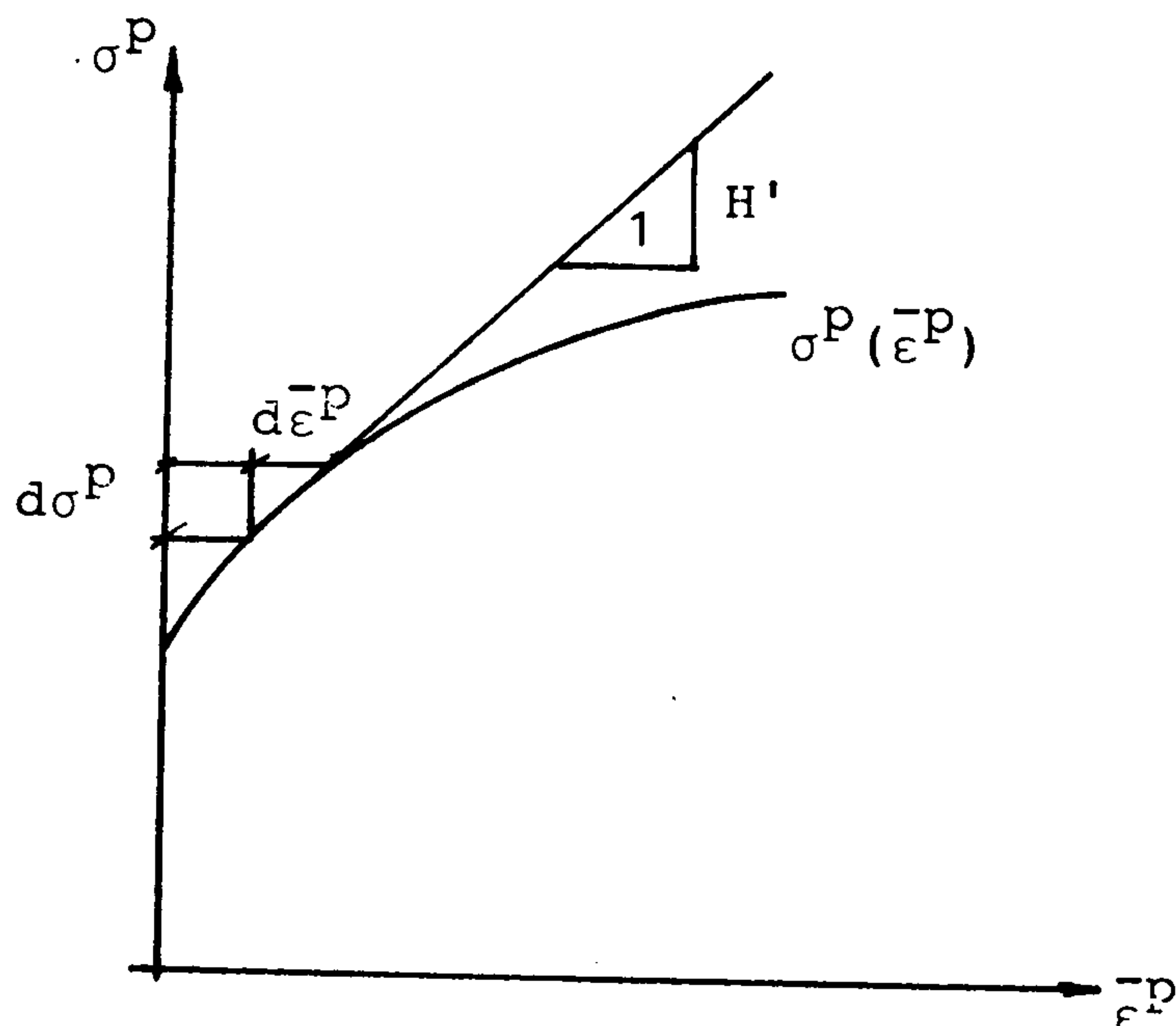


Figura 1
Interpretación del módulo plástico H'

La relación de consistencia de Prager es una consecuencia de la permanencia del vector tensión dentro de la superficie de plastificación durante el comportamiento plástico y se obtiene tomando diferenciales en (3), esto es,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_T d\sigma = \frac{\partial \sigma^P}{\partial \bar{\epsilon}^P} d\bar{\epsilon}^P \quad (11)$$

Introduciendo (10) en (11), resulta

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_T d\sigma = H' d\bar{\epsilon}^P \quad (12)$$

Para la obtención de la relación incremental entre tensión y deformación, en primer lugar las expresiones (1) y (2) son combinadas en la forma:

$$d\sigma_{\sim} = D_{\sim} d\epsilon_{\sim} - D_{\sim} d\epsilon_{\sim}^P \quad (13)$$

que, utilizando la notación

$$a_{\sim} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\sim}} \quad d_{\sim} = D_{\sim} a_{\sim} \quad (14)$$

e introduciendo (8) y (9) se escribe

$$d\sigma_{\sim} = D_{\sim} d\epsilon_{\sim} - d_{\sim} d\epsilon_{\sim}^P \quad (15)$$

Las expresiones (12) y (15) pueden ser interpretadas como un sistema de ecuaciones en las incógnitas $d\sigma_{\sim}$ y $d\epsilon_{\sim}^P$. Es habitual despejar la deformación plástica equivalente premultiplicando (15) por a_{\sim}^T e igualando a (12) en la forma

$$d\epsilon_{\sim}^P = (H' + a_{\sim}^T d_{\sim})^{-1} d_{\sim} d\epsilon_{\sim} \quad (16)$$

y, a continuación, sustituir este resultado en (15) para obtener la relación incremental buscada

$$d\sigma_{\sim} = D_{\sim ep} d\epsilon_{\sim} \quad (17)$$

donde $D_{\sim ep}$, la matriz elasto-plástica, se define

$$D_{\sim ep} = D_{\sim} - d_{\sim} (H' + a_{\sim}^T d_{\sim})^{-1} d_{\sim}^T \quad (18)$$

Esta matriz permite calcular la matriz de rigidez tangente para una estructura modelada según el M.E.F., haciendo

$$K_{\sim T} = \int \begin{matrix} B_{\sim}^T & D_{\sim ep} & B_{\sim} \end{matrix} \quad (19)$$

siendo B_{\sim} la matriz que relaciona los desplazamientos u_{\sim} con las deformaciones según

$$\epsilon_{\sim} = B_{\sim} u_{\sim}$$

Utilizando incrementos de carga Δq_{\sim} lo suficientemente pequeños se podría obtener la respuesta de la estructura, aplicando sucesivamente la relación

$$\Delta u_{\sim} = K_{\sim}^{-1} \Delta q_{\sim} \quad (20)$$

Sin embargo, esta solución -que requería algún procedimiento adicional para estudiar el fenómeno de descarga elástica- es impracticable por requerir un excesivo número de incrementos para una precisión dada en general. Para poder trabajar con incrementos de mayor tamaño es preciso corregir de alguna manera el error introducido por éstos en (20): normalmente se procede a un cálculo de las tensiones para el nuevo estado de deformación, siguiendo el modelo plástico descrito, y una evaluación de las fuerzas internas definidas por

$$f_{\sim} = \int_{\sim} B^T \sigma_{\sim} \quad (21)$$

La diferencia entre carga externa y fuerzas internas es denominada residuo

$$g_{\sim} = q_{\sim} - f_{\sim} \quad (22)$$

y su valor, aparte de ser una estimación del error cometido, puede ser utilizado como una carga correctora para una nueva iteración dentro del mismo incremento

$$\delta u_{\sim} = K_{\sim}^{-1} g_{\sim} \quad (23)$$

dentro del procedimiento de algún método de resolución no lineal.

Respecto al mencionado cálculo de las tensiones utilizadas en (21), Owen y Hinton [1], Chen [2] y Marques [3] proponen el siguiente método, partiendo del estado de tensión en la iteración anterior $\sigma_{\sim i-1}$, $\sigma_{\sim i-1}^p$ y el incremento de deformación calculado $\Delta \epsilon_{\sim} = B \Delta u_{\sim}$:

1) Obtener una primera estimación elástica de la tensión

$$\Delta \sigma_{\sim}^E = D_{\sim} \Delta \varepsilon_{\sim} \quad \sigma_{\sim}^E = \sigma_{\sim i-1} + \Delta \sigma_{\sim}^E \quad (24)$$

Obsérvese que $\Delta \sigma_{\sim}^E$ quiere representar el primer sumando de (15).

2) Comparar el valor de la función de plastificación en σ_{\sim}^E con el límite previo de plastificación:

- Si $f(\sigma_{\sim}^E) \leq \sigma_{\sim i-1}^p$, el punto se halla en estado elástico y por tanto $\Delta \varepsilon_{\sim}^p = 0$ y $\sigma_{\sim i} = \sigma_{\sim}^E$ terminando aquí el cálculo.

- Si $f(\sigma_{\sim}^E) > \sigma_{\sim i-1}^p$, la superficie plástica ha sido traspasada y es preciso corregir el valor de σ_{\sim}^E en los pasos siguientes.

3) Calcular la tensión de contacto $\sigma_{\sim}^C = \sigma_{\sim}^E - R \Delta \sigma_{\sim}^E$ tal que $f(\sigma_{\sim}^C) = \sigma_{\sim i-1}^p$ con $0 < R \leq 1$.

4) Calcular

$$\Delta \varepsilon_{\sim}^p = (H' + a_{\sim}^T d_{\sim})^{-1} a_{\sim}^T R \Delta \sigma_{\sim}^E \quad (25)$$

para lo cual se ha utilizado (16) en forma incremental tomando solamente la parte del incremento de deformación que ha dado lugar al comportamiento plástico, es decir, $R \Delta \varepsilon_{\sim}$.

5) Por último, reducir el valor de la tensión estimada σ_{\sim}^E utilizando (15) en forma incremental

$$\sigma_{\sim i} = \sigma_{\sim}^E - d_{\sim} \Delta \varepsilon_{\sim}^p \quad (26)$$

Dentro de este algoritmo básico, existen diversos refinamientos mencionados por los mismos autores y que afectan al cálculo del coeficiente de reducción R , que puede ser iterativo si $f(\sigma)$ es una función no lineal, o a la subdivisión del exceso -

$R\Delta\sigma_{\sim}^E$ en varias etapas en cada una de las cuales se aplicará - (25) y (26).

También se pueden obtener los valores finales:

$$\bar{\epsilon}_i^P = \bar{\epsilon}_{i-1}^P + \Delta\epsilon^P$$

$$\sigma_i^P = \sigma^P(\bar{\epsilon}_i^P)$$

donde σ_i^P es obtenido a partir de la ley de endurecimiento experimental (fig. 1). Sin embargo, es frecuente que la tensión obtenida en (26) no se halle en la nueva superficie de plastificación, es decir,

$$f(\sigma_{\sim i}) \neq \sigma_i^P$$

Esta diferencia tiene su origen en la asimilación incremental de las ecuaciones diferenciales y se resuelve por distintos procedimientos, de los cuales el más sencillo es el "retorno radial" que consiste en un escalado de la tensión que reduce su valor a la nueva superficie de plastificación mediante

$$\sigma_{\sim i}' = \sigma_{\sim i} \frac{\sigma_i^P}{f(\sigma_{\sim i})}$$

Cuando el valor de los vectores a_{\sim} y d_{\sim} utilizados en (25) y (26) es evaluado en $\sigma_{\sim i}$ o en puntos intermedios entre $\sigma_{\sim i-1}$ y $\sigma_{\sim i}'$, el procedimiento es implícito y requiere el uso de varias iteraciones.

De Borst [4] propone un algoritmo alternativo que es especialmente útil por su economía y que conduce a valores exactos cuando $f(\sigma_{\sim})$ es lineal y H' es constante. En este último caso, - el valor de los vectores a_{\sim} y d_{\sim} no depende del punto y, además, la expresión (25) se puede escribir como:

$$\Delta\epsilon^P = (H' + a_{\sim}^T d_{\sim})^{-1} < f(\sigma_{\sim}^E) - f(\sigma_{\sim}^C) >$$

donde se ha utilizado el corchete Macaulay definido por:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Es más, no es necesario el cálculo de la tensión de contacto σ_{\sim}^C , puesto que $f(\sigma_{\sim}^C) = \sigma_{i-1}^P$, es decir,

$$\Delta \varepsilon^P = (H' + a_{\sim}^T d_{\sim})^{-1} \langle f(\sigma_{\sim}^E) - \sigma_{i-1}^P \rangle \quad (27)$$

y la expresión (26) conduce al valor exacto para $\sigma_{\sim i}$.

Aunque no existe ningún criterio de plastificación que incorpore una función de plastificación lineal (superficie de - plastificación plana), criterios como el de Tresca, Mohr-Coulomb o Rankine presentan amplias zonas en las que cumplen esta propiedad (cada uno de los sextantes del espacio de Haig-Wester-gaard).

Los errores cometidos con este método debidos a la no linealidad de $f(\sigma_{\sim})$ y la variación de H' pueden ser aminorados reduciendo el tamaño del incremento, lo cual es posible gracias a las simplificaciones adoptadas dentro de cada incremento.

2. MODELO ELASTO-FISURABLE

Los modelos de fisuración más ampliamente implementados en la actualidad son quizás los modelos de fisura difusa [5], en los cuales la fisuración se entiende como un fenómeno continuo que se extiende al área de un punto de integración. Cuando se satisface el criterio de fisuración (criterio de tensión o deformación principal máxima normalmente) en el punto en cuestión, se anota la dirección de fisuración y según su normal se adopta un diagrama tensión-deformación de fisura (fig. 2). En futuros estados de carga, la fisura existente en dicho punto podrá seguir abriéndose o cerrándose y reabriéndose (fig. 2), pero su

dirección se mantendrá fija.

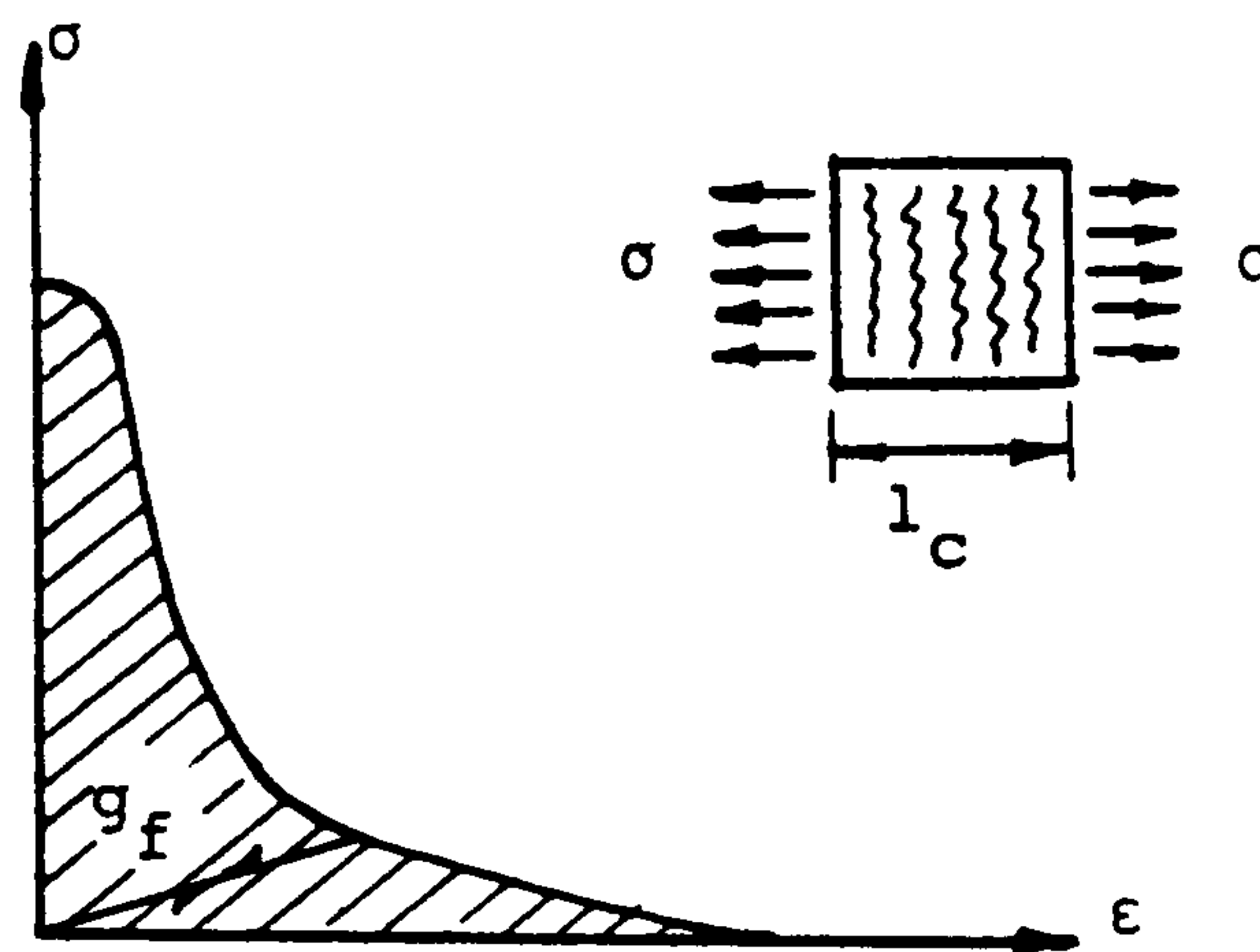


Figura 2

Diagrama de tensión-deformación en el modelo de fisura difusa.

El área del diagrama tensión-deformación de fisura mostrado en la fig. 2, suele obtenerse a partir de la fórmula

$$g_f = \frac{G_f}{l_c} \quad (28)$$

donde

$$G_f = \int \sigma \, d\delta$$

es la energía de fractura por unidad de área (integral del trabajo de la tensión durante la apertura de la fisura) [6] y l_c una longitud característica o "ancho de fisura" que se relaciona con el área o volumen de integración (A o V) y la forma del elemento en el M.E.F. Generalmente se toma

$$l_c = A^{1/2} \quad \delta \quad l_c = V^{1/3}$$

Otros modelos, como el propuesto por Gupta [7], consideran que la dirección de la fisura debe ir cambiando cuando cambia la dirección de la máxima tensión principal, de manera que la -

tensión cortante paralela a la fisura es siempre nula. Esta interpolación no se halla muy lejos del comportamiento experimental observado por dicho autor, en el que la orientación inicial de la microfisuración es distinta de la orientación final de la macrofisura.

En el modelo elasto-fisurable que se expone a continuación, la fisuración es entendida como un fenómeno de plasticidad del material, adoptando como criterio de fisuración el de la tensión principal máxima y como ley de endurecimiento (reblandecimiento) por deformación el diagrama de la fig. 2, el modelo y la metodología descritos en la sección 1 serán totalmente aplicables y el resultado será un modelo semejante a los mencionados de fisura difusa, salvo en los dos aspectos siguientes:

- la dirección de fisura no se mantendrá fija.
- el cierre y reapertura de la fisura equivaldrá a descargas y recargas elásticas (una línea vertical en fig. 2).

Las ecuaciones que definirán el modelo serán, por analogía con el modelo plástico descrito en la sección 1,

$$d\epsilon_{\sim} = d\epsilon_{\sim}^e + d\epsilon_{\sim}^c \quad (29)$$

donde ϵ_{\sim}^e es la deformación debida a la fisuración y ϵ_{\sim}^c es la deformación elástica definida por

$$d\epsilon_{\sim}^e = D_{\sim}^{-1} d\sigma_{\sim} \quad (30)$$

El criterio de fisuración se escribirá

$$F_c(\sigma_{\sim}, \bar{\epsilon}_{\sim}^c) = f_c(\sigma_{\sim}) - \sigma_{\sim}^c(\bar{\epsilon}_{\sim}^c) = 0 \quad (31)$$

donde f_c , función de fisuración, es la tensión principal máxima, σ_{\sim}^c , límite de fisuración, se obtiene de diagramas como el de la figura 2 y $\bar{\epsilon}_{\sim}^c$, deformación equivalente de fisuración es definida por:

$$d\bar{\epsilon}^c = \frac{\sigma^T d\epsilon^c}{\sigma^c} \quad (32)$$

Dada la equivalencia (9), en esta ocasión se escribirá la regla de fisuración

$$d\epsilon^c = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} d\bar{\epsilon}^c \quad (33)$$

Y se introducirá también una ley de reblandecimiento por fisuración a través del módulo de fisuración:

$$H'_c = \frac{d\sigma^c}{d\bar{\epsilon}^c} \quad (34)$$

Relacionando las ecuaciones (29) a (34) es posible obtener de la misma forma que en (17):

$$d\sigma = D_{ec} d\epsilon \quad (35)$$

donde:

$$D_{ec} = D - d_c (H'_c + a_c^T d_c)^{-1} d_c^T$$

$$a_c = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \quad d_c = D a_c$$

La integración de la ecuación (35) puede realizarse mediante las técnicas descritas también en la sección 1 para plasticidad dentro del M.E.F.

3. MODELO ELASTO-PLASTO-FISURABLE

Aunque el comportamiento del hormigón suele estar gobernado por el fenómeno de fisuración, en ciertos estados de compresión también aparece el fallo, y dicho comportamiento suele ser tratado mediante un modelo plástico propiamente dicho [2]. Con el fin de incorporar este comportamiento en el modelo descrito

en la sección anterior, es posible llevar a cabo una ampliación de dicho modelo de la manera que se expone a continuación.

También es posible la incorporación de los efectos térmicos, tanto sobre la producción de deformaciones iniciales como sobre el cambio de propiedades mecánicas. La incorporación de tales efectos en el modelo puede hallarse en la referencia - [8], donde se hace mención a su especial importancia en el estudio del comportamiento estructural de un edificio de contención de una central nuclear ante un accidente o en el comportamiento de estructuras en general durante incendios.

En este modelo, la deformación total se descompondrá en:

$$d\epsilon_{\sim} = d\epsilon_{\sim}^e + d\epsilon_{\sim}^p + d\epsilon_{\sim}^c \quad (36)$$

siendo:

ϵ_{\sim}^e = deformación elástica

ϵ_{\sim}^p = deformación plástica

ϵ_{\sim}^c = deformación de fisuración

y

$$d\epsilon_{\sim}^c = D_{\sim}^{-1} d\sigma_{\sim} \quad (37)$$

Sustituyendo (37) en (36) se obtiene:

$$d\sigma_{\sim} = D_{\sim} d\epsilon_{\sim} - D_{\sim} d\epsilon_{\sim}^p - D_{\sim} d\epsilon_{\sim}^c \quad (38)$$

Es este el momento de introducir los criterios de plastificación y fisuración:

$$f_p(\sigma_{\sim}) - \sigma_p(\bar{\epsilon}_{\sim}^p) = 0 \quad (39)$$

$$f_c(\sigma_{\sim}) - \sigma_c(\bar{\epsilon}_{\sim}^c) = 0$$

las reglas de plastificación y fisuración:

$$\begin{aligned} d\epsilon_{\sim}^p &= a_{\sim}^p d\bar{\epsilon}^p & a_{\sim}^p &= \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{\sim}} \\ d\epsilon_{\sim}^c &= a_{\sim}^c d\bar{\epsilon}^c & a_{\sim}^c &= \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{\sim}} \end{aligned} \quad (40)$$

así como las respectivas leyes de endurecimiento:

$$\begin{aligned} H'_p &= \frac{\partial \sigma^p}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ H'_c &= \frac{\partial \sigma^c}{\partial \bar{\epsilon}^c} \end{aligned} \quad (41)$$

siendo $\bar{\epsilon}^p$ y $\bar{\epsilon}^c$ las deformaciones equivalentes plástica y de fisuración definidas por (4) y (32), respectivamente.

Respecto a la elección de los criterios (39), para la fisuración se adoptará el criterio de tensión principal máxima (como en el modelo elasto-fisurable) y para la plasticidad el criterio de Von-Mises. Esta pudiera ser una aproximación razonable a la realidad en la que la sección de la superficie de fallo - del hormigón según el plano desviador presenta una forma triangular en la zona de tracción para ir regularizándose hacia una circunferencia en la zona de compresión [2] (ver fig. 3).

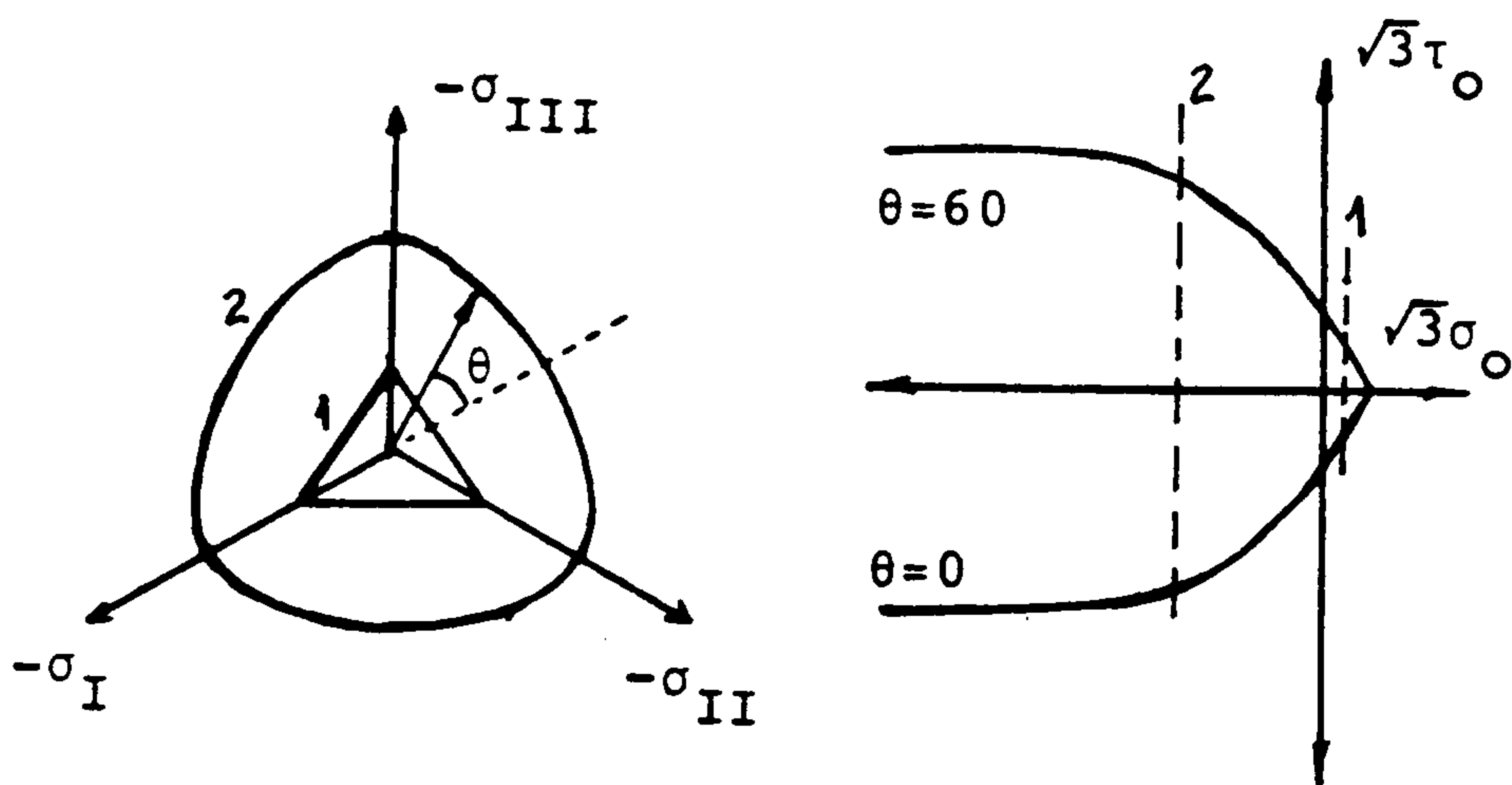


Figura 3

Secciones de la superficie de fallo del hormigón en el plano desviador y el plano de Rendulic.

Las ecuaciones de consistencia se obtienen tomando diferen
ciales en (39) e introduciendo (41):

$$\begin{aligned} a_{\sim p}^T d_{\sim} \sigma &= H'_p d\bar{\epsilon}^p \\ a_{\sim c}^T d_{\sim} \sigma &= H'_c d\bar{\epsilon}^c \end{aligned} \quad (42)$$

Las manipulaciones para la obtención de la relación ten-
sión-deformación parten de la consideración de (40) en (38), es
decir,

$$d_{\sim} \sigma = D_{\sim} d_{\sim} \epsilon - d_{\sim p} d\bar{\epsilon}^p - d_{\sim c} d\bar{\epsilon}^c \quad (43)$$

donde:

$$d_{\sim p} = D_{\sim} a_{\sim p} \quad d_{\sim c} = D_{\sim} a_{\sim c}$$

Premultiplicando (43) por $a_{\sim p}^T$ y $a_{\sim c}^T$ en sucesivas veces y com
parando con (42) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (H'_p + a_{\sim p}^T d_{\sim p}) d\bar{\epsilon}^p + a_{\sim p}^T d_{\sim c} d\bar{\epsilon}^c &= d_{\sim p}^T d_{\sim} \epsilon \\ a_{\sim c}^T d_{\sim p} d\bar{\epsilon}^p + (H'_c + a_{\sim c}^T d_{\sim c}) d\bar{\epsilon}^c &= d_{\sim c}^T d_{\sim} \epsilon \end{aligned}$$

que puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} H' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}_{\sim}^T \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}_{\sim} \begin{bmatrix} d\bar{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}_{\sim}^T d_{\sim} \epsilon \quad (44)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_p & 0 \\ 0 & H'_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}_{\sim} = \begin{bmatrix} a_{\sim p} & a_{\sim c} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}_{\sim} = \begin{bmatrix} d_{\sim p} & d_{\sim c} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d\bar{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\bar{\epsilon}^p \\ d\bar{\epsilon}^c \end{bmatrix} \quad (45)$$

Las deformaciones equivalentes se pueden despejar de (44)
en la forma:

$$[d\bar{\epsilon}] = \left\{ [H'] + [a]_n^T [d]_n \right\}^{-1} [d]_n^T d\epsilon_n \quad (46)$$

Por último, introduciendo (45) en (43), queda:

$$d\sigma_n = D_n d\epsilon_n - [d]_n [d\bar{\epsilon}]$$

y sustituyendo (46) se obtiene la relación buscada:

$$d\sigma_n = D_{epc} d\epsilon_n \quad (47)$$

donde:

$$D_{epc} = D_n - [d]_n \left\{ [H'] + [a]_n^T [d]_n \right\}^{-1} [d]_n^T \quad (48)$$

De este modo la fisuración y la plasticidad se pueden producir simultáneamente en un mismo punto como fenómenos acoplados mediante un modelo matemático que supone una generalización de la Teoría de la Plasticidad.

Para la implementación de este modelo dentro del M.E.F., pueden utilizarse técnicas análogas a las descritas en la sección 1, si bien el problema reviste ahora mayor complejidad [8].

4. EJEMPLOS RESUELTOS

Los ejemplos que se presentan a continuación han sido resueltos con el modelo de comportamiento descrito en la sección 3 gracias a su implementación en un programa de Elementos Finitos para estructuras axisimétricas que utiliza una versión modificada del método de longitud de arco propuesto por Crisfield [9] para las iteraciones no lineales.

En el primer ejemplo se estudiará la propagación de la fisuración radial en un cilindro de pared gruesa de hormigón sometido a presión interna. Se trata de un caso analizado por Argyris y otros [10], cuya geometría y características aparecen en la fig. 4, junto con la malla de Elementos Finitos empleada por dichos autores.

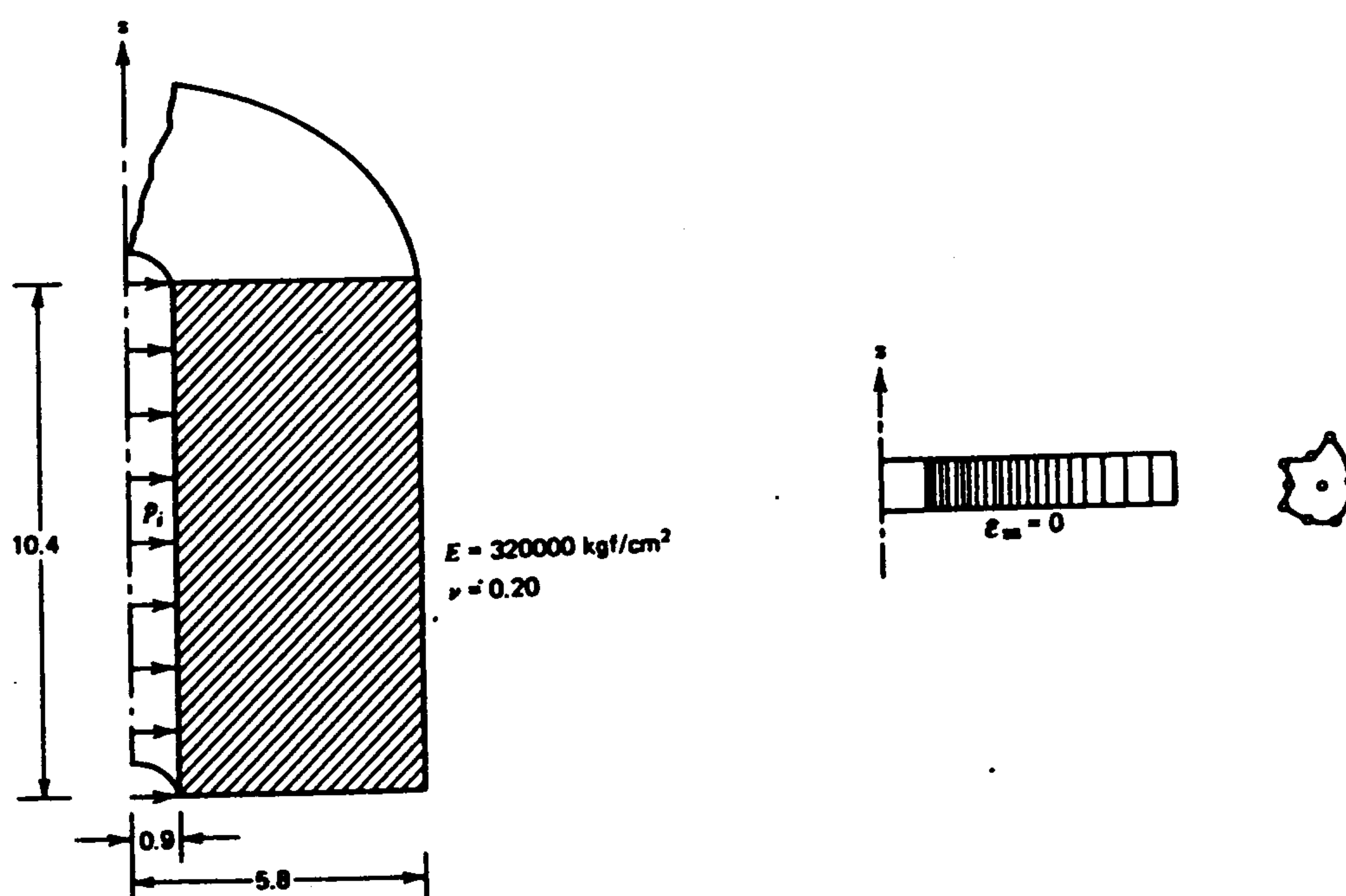


Figura 4

Cilindro de pared gruesa sometido a presión interna. Argyris [10].

En el análisis realizado por Argyris y sus colaboradores se empleó un modelo elástico con un criterio de fallo del tipo Mohr-Coulomb truncado en la zona de tracción para $f_t = 44 \text{ Kgf/cm}^2$. La figura 5 muestra las curvas de carga obtenidas para dos casos límite de comportamiento (modelo dúctil y modelo frágil), - así como otro intermedio (caída hasta $f_t = 22 \text{ Kgf/cm}^2$), que da lugar a una carga de rotura que coincide con la obtenida experimentalmente $p_{ult} = 141 \text{ Kgf/cm}^2$.

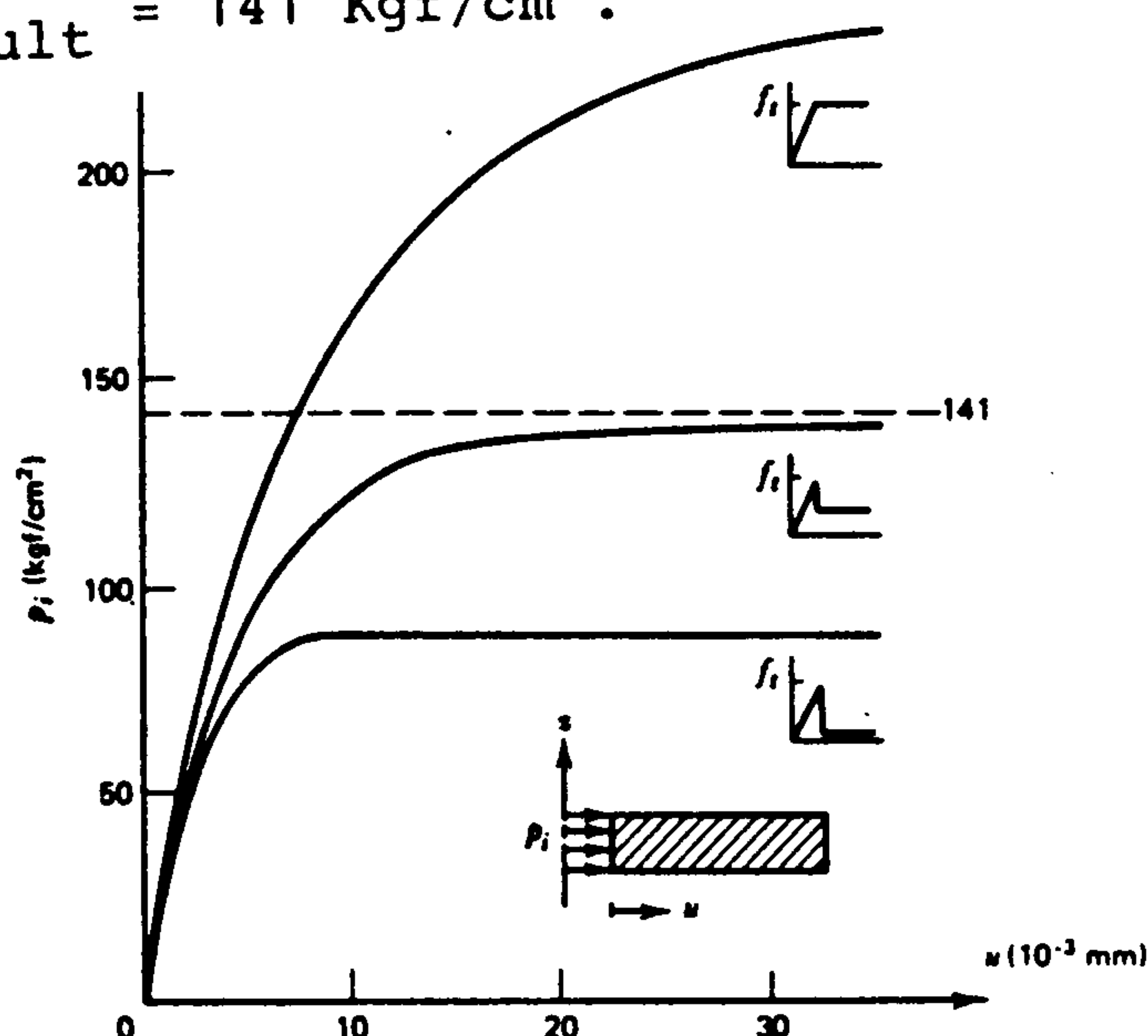


Figura 5

Resultados de Argyris [10]

El mismo análisis fue realizado con el modelo aquí propuesto, para lo cual se introdujo la malla de la figura 6 en el citado programa. Respecto a las características del material, se tomó un diagrama tensión-deformación de fisura (fig. 2), con forma triangular y valores de la energía de fractura de $G_f = 0,075; 0,118$ y $0,225$ Kgf/cm.

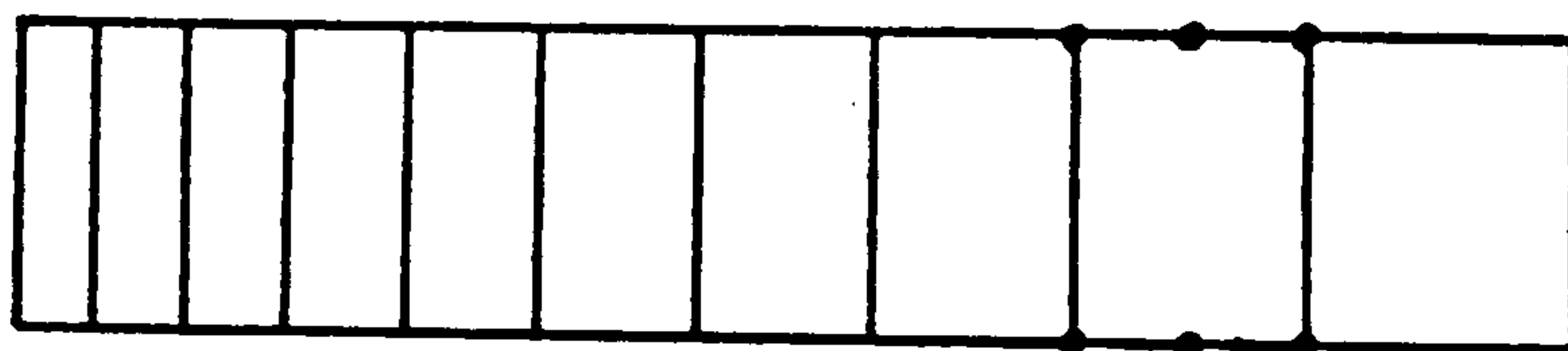


Figura 6

Malla utilizada con el presente programa

En la figura 7 aparecen las curvas de carga obtenidas con dichos valores de G_f . La curva intermedia fue obtenida por tanteo para ajustar el valor experimental de la presión de rotura. La principal diferencia de estas curvas con las que aparecen en la figura 6 estriba en la existencia de una rama descendente, obtenida gracias al método de longitud del arco mencionado.

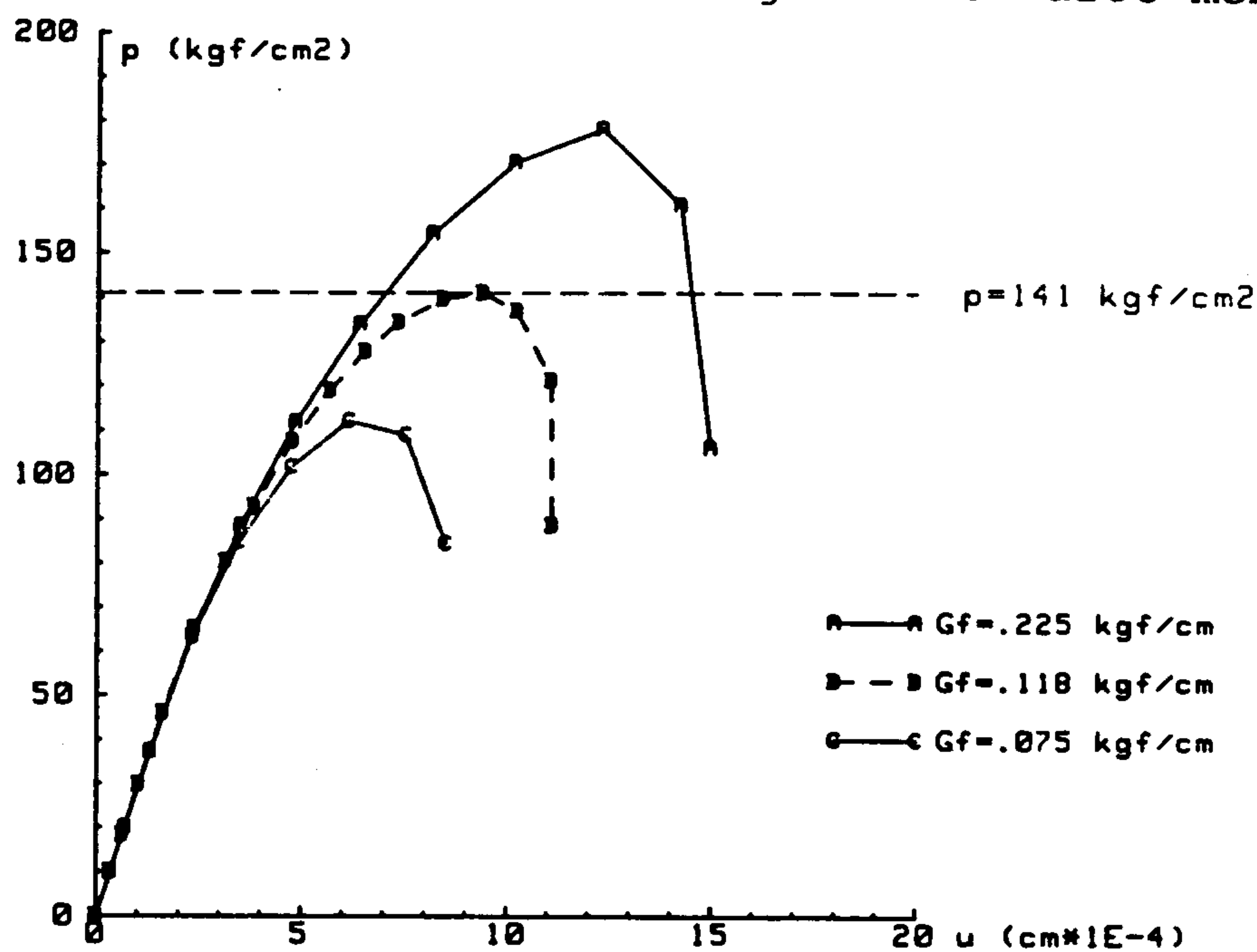


Figura 7

Resultados obtenidos con el presente programa

En todo caso sigue existiendo el problema de la falta de información detallada del comportamiento post-fisura, siendo en

este ejemplo una fuente de gran variabilidad en los resultados.

En la figura 8 se recoge nuevamente la curva obtenida para $G_f = 0,118 \text{ Kgf/cm}$, indicando la profundidad de la fisuración radial en algunos estados.

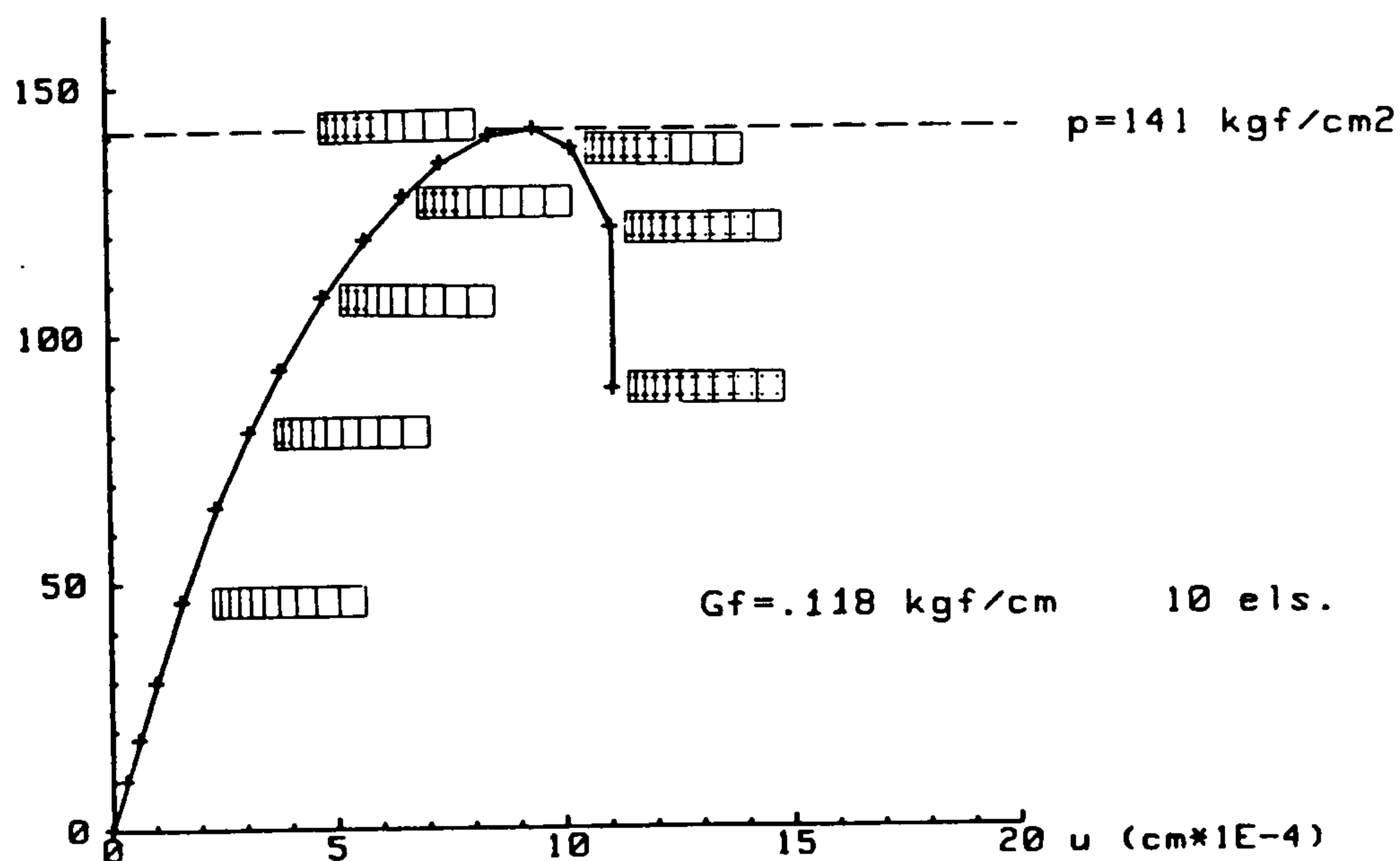


Figura 8

Propagación de la fisuración radial

El segundo ejemplo se refiere a una estructura de mayor - complejidad. Se trata de una tapa de reactor pretensada y sometida a presión interna (fig. 9). Las características y los resultados experimentales fueron tomados de Campbell-Allen and - Low [11] y los resultados del análisis se muestran en la figura 10.

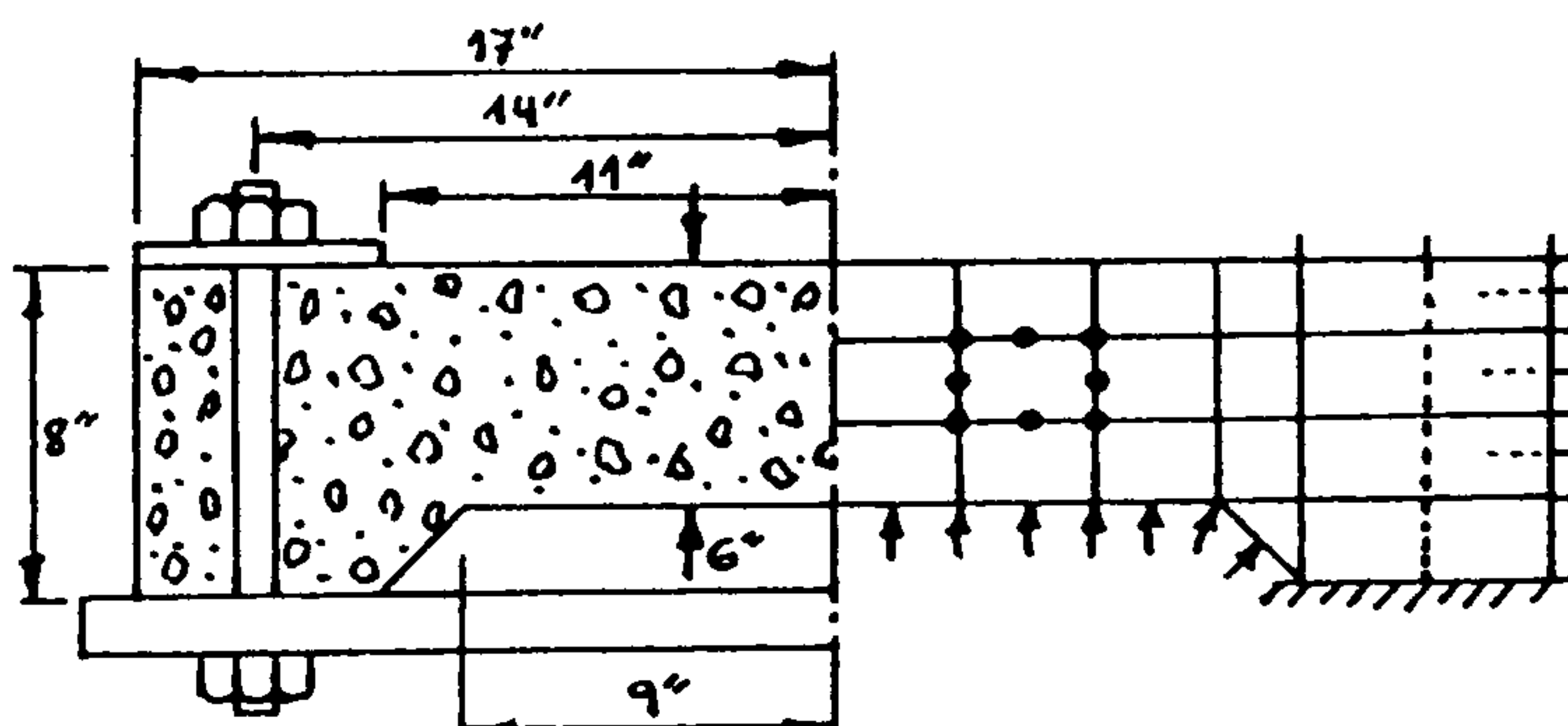
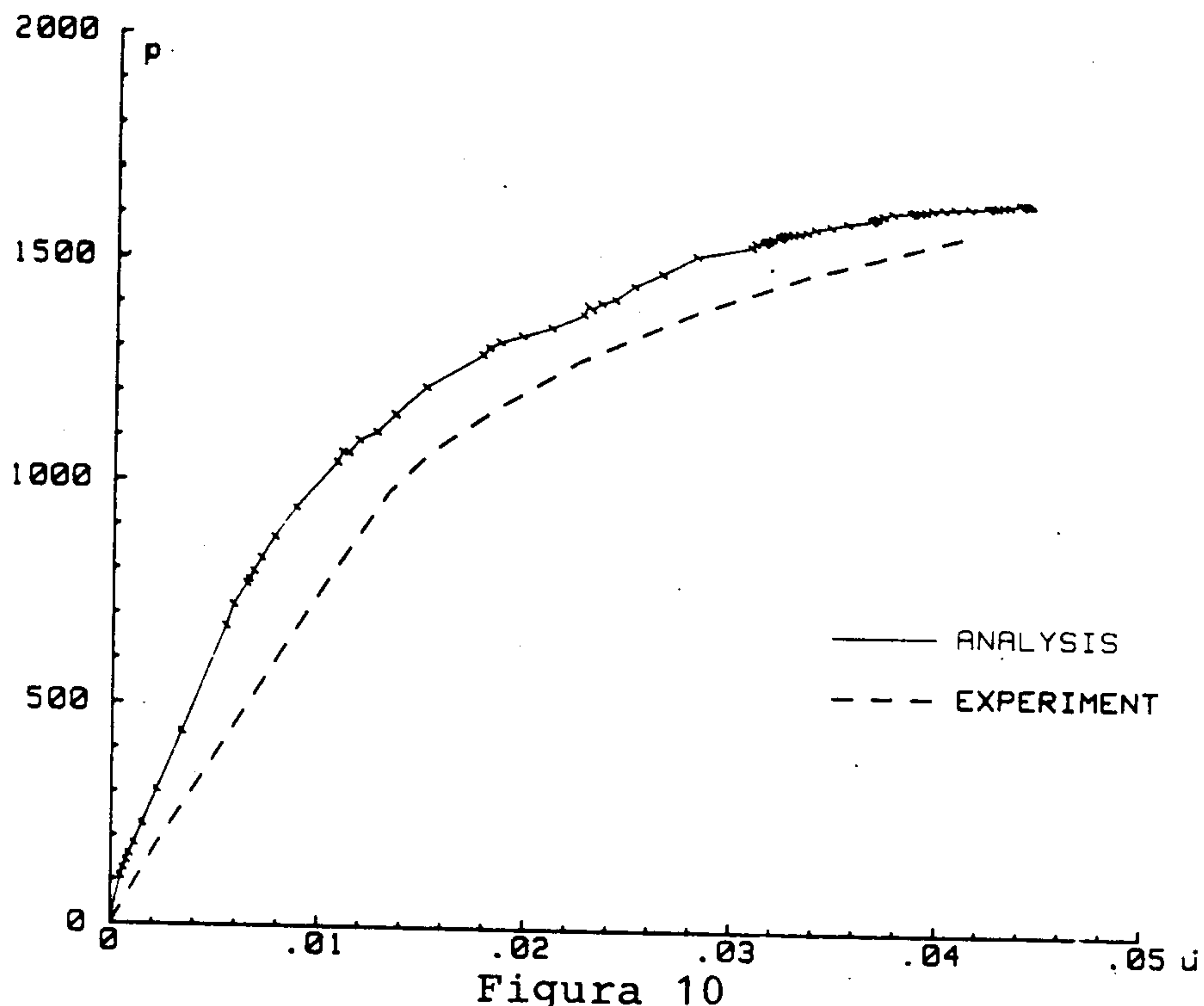


Figura 9

Tapa de reactor sometida a presión interna

Respecto a las discrepancias con la curva experimental, deben achacarse a un desconocimiento del parámetro G_f real, así como la forma del diagrama tensión-deformación de fisura. Por -

otro lado dicha curva experimental ha de considerarse que corresponde a un único ensayo.



Resultados para la tapa de reactor analizada

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de investigación "Métodos para calcular la seguridad de estructuras en centrales nucleares", subvencionado por la C.A.Y.C.I.T.

6. REFERENCIAS

- 1- OWEN, D.R.J., HINTON, E. (1980)
Finite Element in Plasticity.
Pineridge Press.
- 2- CHEN, W.F. (1982)
Plasticity in Reinforced Concrete.
McGraw-Hill.

- 3- MARQUES, J.M.M.C. (1983)
Stress Computation in Elastoplasticity.
Eng. Comput. Vol. 1. Pineridge Press.
- 4- DE BORST, R.; VERMEER, P.A. (1984)
Non Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock.
Heron. Vol. 29.
- 5- ROTS, J.G.; NANTA, P.; KUSTERS, G.M.A.; BLAAWENGRAAD, J.
(1985)
Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete.
Heron, Vol. 30.
- 6- REINHARDT, H.W.; CORNELISSEN, H.A.W.; HORDIJK, D.A. (1986)
Tensile Test and Failure Analysis of Concrete.
ASCE. Journal Struct. Eng., Vol. 112, No 11.
- 7- GUPTA, A.K.; AKBAR, H. (1984)
Cracking in Reinforced Concrete Analysis.
Journal Struct. Eng., Vol. 110, No 8.
- 8- MOLINA, J. (1987)
Seguridad de Edificios de Contención de Hormigón Armado y -
Pretensado.
Tesis Doctoral. U.P.M.
- 9- CRISFIELD, M.A. (1984)
Overcoming Limit Points with Material Softening and Strain
Localization.
Numerical Methods for Non-Linear Problems. Pineridge Press.
p. 244.
- 10- ARGYRIS, J.H.; FAUST, G.; SZIMMAT, J.; WARUKE, E.P.; WILLAN,
K.J. (1974)
Recent Developments in the Finite Element Analysis of Pres-
tressed Concrete Reactor Vessels.
Nuclear Engineering and Design. 28, p. 42.

11-- CAMPBELL-ALLEN, D.; LOW, E.W.E. (1967)

Pressure Test on end Slabs for Prestressed Concrete Pressure Vessels.

Nuclear Engineering and Design 6, p. 345.